

# Standpunt van de Resonansgroep wiskunde ten aanzien van de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later

13 november 2007

## 1 Inleiding

De resonansgroep wiskunde, die op 1 augustus 2006 is ingesteld door de Minister van Onderwijs Cultuur en Wetenschappen, is gevraagd een reactie te geven op de inhoud van de wiskundevakken voor havo en vwo in de overgangperiode vanaf 2007 zoals die vermeld staat in de 'definitieve concepten' van de door de CEVO te vervaardigen syllabi voor wiskunde A, B en C. De resonansgroep zal zich daarbij in de eerste plaats richten op de relevantie van de verschillende onderdelen van die wiskundevakken voor het vervolgonderwijs, maar daarnaast zal zij ook aandacht besteden aan algemene inhoudelijke en instrumentele aspecten.

De resonansgroep spreekt haar diepe teleurstelling uit over het feit dat zij haar standpunt moet bepalen op een moment dat, naar verluidt, wezenlijke veranderingen in die programma's om praktische redenen niet meer mogelijk zijn. Zij heeft echter gemeend toch haar bijdrage te moeten leveren in het besef dat ook kleine stappen in de goede richting van groot belang voor het wiskundeonderwijs kunnen zijn. Zij vertrouwt erop dat de minister alles in het werk zal stellen om zulke stappen waar mogelijk te realiseren. Ook verwacht zij dat de Vernieuwingscommissie wiskunde (cTWO) van haar bevindingen en aanbevelingen op passende wijze gebruik zal maken.

## 2 Doorstroomperspectieven

De vakken vwo wiskunde A, vwo wiskunde B, vwo wiskunde C, havo wiskunde A en havo wiskunde B zijn ieder gericht op doorstroming naar specifieke groepen van studierichtingen in het hoger onderwijs, elk met hun eigen behoeften aan wiskundige vaardigheden als ingangsniveau. Omdat in de syllabi dit doorstroomperspectief grotendeels ontbreekt en er op dit moment in

vrijwel alle studierichtingen waar wiskunde wordt gebruikt sprake is van aansluitingsproblemen, acht de resonansgroep het van belang op deze plaats de doorstroomperspectieven te benoemen.

- *Wiskunde A vwo*. Dit vak bereidt voor op universitaire studierichtingen met een economisch en bedrijfskundig karakter. Daarnaast legt het ook de basis voor studierichtingen in de gezondheidswetenschappen en een aantal exacte en technische richtingen. Naast kennis van kansrekening en statistiek is hierbij reken- en formulevaardigheid vereist en vaardigheid in het werken met grafieken en functies, daarbij inbegrepen exponentiële, logaritmische en goniometrische functies, alsmede de beheersing van de differentiaalrekening.
- *Wiskunde B vwo*. Dit vak bereidt voor op universitaire studierichtingen met een technische of bèta-signatuur. Het ontwikkelen van reken- en formulevaardigheid, vaardigheid in het werken met grafieken en functies en de beheersing van de differentiaal- en integraalrekening staan centraal.
- *Wiskunde C vwo*. Dit vak bereidt voor op studierichtingen in de sociale wetenschappen. Naast kennis van kansrekening en statistiek is hierbij reken- en formulevaardigheid vereist en vaardigheid in het werken met grafieken en functies, daarbij inbegrepen exponentiële en logaritmische functies.
- *Wiskunde A havo*. Dit vak bereidt voor op de niet-technische en niet-exacte studierichtingen in het hbo. Bijvoorbeeld studierichtingen in de economische en bedrijfskundige sector, de gezondheidssector of de pabo. Naast reken- en formulevaardigheid en vaardigheid in het werken met eenvoudige grafieken en functies is daarbij vaardigheid op het gebied van de elementaire kansrekening en statistiek vereist.
- *Wiskunde B havo*. Dit vak bereidt voor op hbo-studierichtingen met een technische of exacte signatuur. Het ontwikkelen van reken- en formulevaardigheid, vaardigheid in het werken met grafieken en functies en beheersing van de differentiaalrekening staan centraal.

### **3 Aansluitingsproblemen en doorstroomrelevantie**

De aansluitingsproblemen op het gebied van de wiskunde die zich thans in vrijwel alle sectoren van het hoger onderwijs voordoen, kunnen kort gekarakteriseerd worden als een gebrek aan reken- en formulevaardigheid. Het meest nijpend zijn deze problemen in de technische en de exacte studierichtingen, maar ook bijvoorbeeld bij de universitaire studierichtingen economie (jaarlijks duizenden eerstejaarstudenten) is de aansluitingsproblematiek groot. In al deze studierichtingen op hbo en universiteit wordt namelijk zowel bij de wiskundige steunvakken als bij de toepassingen van de wiskunde in het hoofdvak een

beroep gedaan op een aanzienlijke mate van formulevaardigheid en kennis van elementaire functies en hun eigenschappen. Die vaardigheid is bij de huidige generatie studenten afwezig of onvoldoende ontwikkeld.

Dit probleem wordt inmiddels in vrijwel alle universiteiten en hogescholen gesignaleerd. Bijspijker cursussen waarin de ontbrekende havo- en vwo-kennis in hoog tempo alsnog behandeld wordt, zijn hiervan het gevolg. Het spreekt vanzelf dat dit een uitermate ongewenste situatie is. Soortgelijke aansluitingsproblemen doen zich overigens ook voor bij de pabo, zoals blijkt uit verontrustende lage scores op daar afgenomen rekentoetsen.

De resonansgroep ziet het als een van haar belangrijkste taken ertoe bij te dragen dat deze problemen zo snel mogelijk de wereld uit worden geholpen. Zij doet daarom de volgende voorstellen:

1. *Zorg ervoor dat het ontwikkelen van reken- en formulevaardigheid weer als een rode draad door het gehele wiskundeonderwijs heenloopt.*
2. *Splits voor alle wiskundevakken het centrale schriftelijke eindexamen (CE) in twee delen: een deel dat zonder hulpmiddelen (grafische rekenmachine en formulekaart) wordt afgenomen, en een deel waarin wel van deze hulpmiddelen gebruik mag worden gemaakt.*
3. *Heroverweeg de rol van contexten in het wiskundeonderwijs.*

Hieronder zullen deze voorstellen nader gemotiveerd worden. De eerste twee voorstellen hangen nauw samen, en zijn gerelateerd aan de rol van de grafische rekenmachine en de formulekaart in het huidige onderwijs.

De resonansgroep heeft verder geconstateerd dat de concept-syllabi op een groot aantal punten wijzigingen inhouden ten opzichte van de huidige regelingen. Met twee belangrijke wijzigingen is zij het volstrekt oneens. Zij dringt er daarom met klem op aan deze wijzigingen ongedaan te maken. Mocht dit om praktische redenen op korte termijn niet realiseerbaar zijn, dan dringt zij er bij de commissie cTWO op aan ervoor zorg te dragen dat dit vanaf 2010 wel het geval is.

4. *Toets bij wiskunde A vwo de differentiaalrekening in het centraal schriftelijk examen (CE). Volgens de concept-syllabus zal dit onderdeel (domein Ba) niet meer in het CE worden getoetst. De rekenregels voor differentiëren zullen zelfs niet meer verplicht in het schoolexamen getoetst worden! Voor de beoogde vervolgopleidingen: economie, bedrijfskunde, gezondheidswetenschappen en een aantal exacte en technische studierichtingen, is differentiaalrekening een essentieel onderdeel dat zonder meer in het CE getoetst moet worden.*
5. *Breng de onderdelen kansrekening en statistiek weer terug in het examenprogramma voor wiskunde B vwo. Deze onderdelen zijn voor de toepassingen van de wiskunde en voor de wiskunde in het vervolgonderwijs van groot*

belang. De voor dit voorstel benodigde ruimte in het examenprogramma kan gevonden worden door het schrappen van een aantal doorstroom-irrelevante onderdelen, met name het domein Gb, *Voortgezette meetkunde*. Opname van kansrekening en statistiek in het keuzevak wiskunde D biedt voor het gemis van deze onderdelen in wiskunde B geen compensatie omdat wiskunde D voor geen enkele vervolgopleiding verplicht mag worden gesteld.

### 3.1 De rol van de grafische rekenmachine en de formulekaart

Voor het centraal schriftelijk eindexamen (CE) mogen de kandidaten volgens de huidige regelingen gebruik maken van een goedgekeurde grafische rekenmachine (GR) en een formulekaart. In het geheugen van de GR kan informatie worden opgeslagen, bijvoorbeeld de gehele inhoud van de formulekaart, en nog veel meer. Met de GR kan wel numeriek en grafisch worden gewerkt, maar niet symbolisch (zoals bij computeralgebrapakketten). Wel is het mogelijk de GR te programmeren zodat er wiskundige formules en procedures mee kunnen worden uitgevoerd.

De GR is een prachtig instrument met veel mogelijkheden om het wiskundeonderwijs te verdiepen en te verlevendigen. Helaas hebben overmatig gebruik van de GR op school en de mogelijkheid er tijdens het CE onbeperkt gebruik van te maken, ertoe geleid dat leerlingen zelf te weinig reken- en formulevaardigheden ontwikkelen. Iets soortgelijks geldt voor de formulekaart: leerlingen leren zelfs de allereenvoudigste en meest voorkomende formules niet meer omdat ze op de formulekaart staan. Dat ze daardoor een ernstig tekort aan formulevaardigheid en wiskundig inzicht oplopen, blijkt pas aan het begin van hun studie in het hoger onderwijs.

De resonansgroep pleit daarom voor een herbezinning op de rol van de GR en de formulekaart in het onderwijs. Om twee voorbeelden te noemen: iedereen die wiskunde gebruikt, moet zelf met pen en papier vlot haakjes uit kunnen werken of breuken met letters erin kunnen vereenvoudigen of onder één noemer kunnen brengen. De huidige generatie studenten mist dit soort vaardigheden. Vandaar de aanbeveling: het ontwikkelen van formulevaardigheden moet weer als een rode draad door het gehele wiskundeonderwijs lopen. Ook in het CE dient dit getoetst te worden. Daarom luidt de tweede aanbeveling: splits de centrale examens in twee delen. In het eerste deel wordt formulevaardigheid getoetst zonder gebruik van GR of formulekaart. Het tweede deel van het examen wordt besteed aan opgaven waarbij de GR en (eventueel) de formulekaart wél zijn toegestaan. Beperkingen aan de mogelijkheden van de GR (of, in de toekomst, andere ICT-middelen) zijn dan niet meer nodig.

Met nadruk stelt de resonansgroep dat inhoud en niveau van de examenstof in het gedeelte zonder hulpmiddelen in overleg met het veld en de CEVO moeten worden vastgesteld. Daarbij zal het accent moeten liggen op elementaire, veel voorkomende reken- en formulevaardigheden die geen grote geheugen-

training vereisen. Hierdoor zullen de bijspijker cursussen in het hoger onderwijs hopelijk snel overbodig worden

In de verschillende concept-syllabi is als nieuw subdomein A5, *Algebraïsche vaardigheden* opgenomen. In hoofdstuk 3 van elke concept-syllabus wordt daaraan invulling gegeven. De resonansgroep beschouwt dit als een stap in de goede richting, maar dringt aan op een verdere, zorgvuldige uitwerking, waarbij het uitgangspunt centraal moet staan dat het ontwikkelen van reken- en formulevaardigheid, los van contexten, als een rode draad door het gehele wiskundeonderwijs heenloopt.

### 3.2 De rol van contexten in het wiskundeonderwijs.

Contexten kunnen een nuttige rol spelen in het wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld bij het introduceren van nieuwe begrippen en onderwerpen. Ze vormen echter een middel en geen doel. Het doel van het wiskundeonderwijs is het leren beheersen van de taal van de wiskunde en het zinvol leren inzetten van de instrumenten van de wiskunde. De kracht van de wiskunde ligt namelijk juist in de abstractie, in de inzetbaarheid van *dezelfde* instrumenten in de meest uiteenlopende toepassingsgebieden. Daarom is de wiskunde de taal geworden van de natuurwetenschappen, de techniek, een groot deel van de economie en in het algemeen van alle vakken of onderdelen van vakken waarin kwantitatieve en structurele elementen van belang zijn.

Het is goed wanneer ook in het wiskundeonderwijs de kracht van de wiskunde getoond wordt in toepassingen. Dat moeten dan echter wel zinvolle toepassingen zijn waarin kritische modelvorming en functioneel gebruik van het wiskundige instrumentarium centraal staan. Deze vaardigheden kunnen in goed doordachte opgaven met zinvolle contexten worden aangeleerd, en ook profielwerkstukken en praktische opdrachten zijn hiervoor bij uitstek geschikt. Maar opgaven die zijn opgebouwd rond gekunstelde contexten, of vraagstukken waarbij de oorspronkelijke zinvolle context door oversimplificaties krachteloos gemaakt is, zijn contraproductief en schadelijk. Ze geven namelijk een verkeerd beeld van de manier waarop wiskunde in de beroepspraktijk, in het onderzoek en in het vervolgonderwijs wordt gebruikt.

Het gebruik van contexten in eindexamenopgaven wordt vaak mede gemotiveerd door te verwijzen naar het domein A, *Vaardigheden*, dat in alle concept-syllabi opgenomen is als domein dat in het CE getoetst moet worden. Domein A bevat onder meer de subdomeinen A1, *Informatievaardigheden*, A2, *Onderzoeksvaardigheden* en A3, *Technisch-instrumentele vaardigheden*. Deze vaardigheden zijn geïntroduceerd in de tijd dat de Tweede Fase werd ingevoerd. Elke vak moest zo'n domein vaardigheden bevatten. Het voorschrift om ook de domeinen A1, A2 en A3 in het CE te toetsen heeft de examenmakers ertoe gebracht veel examenopgaven in te bedden in een context. Die examencontexten kunnen, behalve bij kansrekening en statistiek, echter zelden een kritische analyse op het gebied van modelvorming en realiteitswaarde doorstaan.

Bovendien is in zulke vraagstukken vrijwel nooit sprake van modelvorming door de kandidaten; dat kan ook niet in zo'n examen. De modellen worden kant en klaar aangeboden en de vragen worden in een uitgewerkte, gemakkelijk behapbare vorm gepresenteerd waarbij de antwoorden vaak worden voorgezegd om de vragen onderling onafhankelijk te houden. Het is dan de vraag of de globale eindtermen van de subdomeinen A1 en A2 eigenlijk wel getoetst worden.

Het bovenstaande roept de vraag op in hoeverre het überhaupt gewenst is eindexamenopgaven in een context te plaatsen. De resonansgroep is van oordeel dat examenopgaven alleen in een context geplaatst mogen worden wanneer die context bestand is tegen een kritische analyse en wanneer de vraagstelling in de opgave uitmondt in het oplossen van zinnige problemen met daartoe geëigende wiskundige hulpmiddelen. Zij ziet liever contextloze opgaven dan opgaven waarin niet aan deze voorwaarden is voldaan.

## 4 Detailvoorstellen

In deze sectie geeft de resonansgroep per vak de onderdelen aan die niet relevant zijn voor de doorstroming naar het hoger onderwijs. Zij stelt voor die onderdelen te schrappen. In een aantal gevallen geeft zij ook aan welke voor de doorstroming belangrijke onderdelen in de voorgestelde programma's niet of niet voldoende aan de orde komen. Zij is daarbij uitgegaan van de hierboven gegeven doorstroomprofielen van de verschillende wiskundevakken.

### 4.1 Wiskunde A vwo

- Domein Ea, *Grafen en Matrices*, kan worden geschrapt.
- In domein Cg1, *Veranderingen*, ligt te veel nadruk op het rekenen met differenties en differentiequotiënten. Een veel beknoptere behandeling is hier voldoende.
- In domein Bg, *Functies en grafieken*, dienen ook de e-macht en de natuurlijke logaritme te worden behandeld.

Het nu voorgestelde programma voor wiskunde A is beslist onvoldoende voor universitaire opleidingen op het gebied van de economie, de bedrijfskunde, de gezondheidswetenschappen en de exacte en technische studierichtingen waar wiskunde A vwo als vooropleiding wordt geaccepteerd.

### 4.2 Wiskunde B vwo

- Het domein Gb, *Voortgezette meetkunde*, is irrelevant voor de vervolgstudies. Het kan worden geschrapt.

- In subdomein Bg1, *Standaardfuncties*, dient ook de tangensfunctie behandeld te worden.
- In subdomein Cg1, *Veranderingen*, kan de behandeling van differenties en differentiequotienten sterk worden bekort. Met name de onderdelen 17, 18, 19, 22, 23, 24 en 25 kunnen gemist worden.
- In subdomein Bb1, *Afgeleide functies*, kan 77 gemist worden. Bij de onderdelen 82 en 87 kan het numeriek-grafische werk vervallen.

### 4.3 Wiskunde C vwo

Zoals het programma er nu ligt, is het zeer vol. Hoewel de inleiding van de syllabus claimt dat het nieuw gepresenteerde wiskunde C programma uitsluitend onderdelen uit het vigerende A1 programma bevat, worden er veel onderwerpen genoemd die allang niet meer in de wiskunde A1 examens getoetst worden. Dit zijn o.a. hypothesetoetsen, continuïteitscorrectie, binomium van Newton en de rekenregels voor exponenten en logaritmen.

De resonansgroep stelt voor het programma voor wiskunde C nog eens kritisch te bezien in het licht van de behoefte aan wiskundige vaardigheden bij de maatschappijwetenschappen. Zij heeft in sectie 2 hiervoor reeds een eerste aanzet gegeven. Bij die herbezinning op de inhoud dient ook gewaakt te worden voor overladenheid.

### 4.4 Wiskunde A havo

Het voorgestelde programma bevat geen subdomeinen die voor het vervolgonderwijs irrelevant zijn. Wel wil de resonansgroep een ernstig punt van zorg noemen. Zij is verontrust over het feit dat veel technische richtingen in het hbo studenten toelaten met alleen havo wiskunde A in hun pakket. De wiskundige bagage van zulke studenten is volstrekt onvoldoende voor het volgen van een technische hbo-studie, zoals telkens weer blijkt. De resonansgroep vindt het niet fair tegenover toekomstige studenten dat hbo-instellingen door hun toelatingseisen voor deze richtingen zo te formuleren, bij havisten zonder wiskunde B in hun pakket irreële verwachtingen wekken.

### 4.5 Wiskunde B havo

- Subdomein D1, *Fragmenttekeningen van ruimtelijke objecten* is voor het vervolgonderwijs niet relevant.
- In domein E4, *Periodieke functies*, kan onderdeel 67 vervallen.
- Domein B1, *Veranderingen* kan sterk worden bekort. Met name in de onderdelen 6 tot en met 11 kan veel worden geschrapt.

- In subdomein E1, *Functies en grafieken*, dienen ook de tangensfunctie, de e-macht en de natuurlijke logaritme te worden opgenomen.
- In domein H, *Toegepaste analyse*, dient ook de quotiëntregel te worden behandeld. Leg verder geen beperkingen op aan de functies die gedifferentieerd worden.